Anales de la Real Academia de Doctores de España
Volumen 9, pp. 127-148, 2005

UNA REVISIÓN SOBRE LA DEFINICIÓN DE LA VARIABLE ALEATORIA REAL LOGÍSTICA GENERALIZADA

Fco. J. Díaz-Llanos Sáinz-Calleja
Dariush Ghorbanzadeh
José Luis Valencia Delfa

RESUMEN

El objetivo de este artículo es el de presentar cuatro definiciones de la variable aleatoria real logística generalizada equivalentes, basándonos en variables aleatorias reales continuas.

La primera se contempla en (1, 2) y está basada en la Ley de Gumbel. La idea de la segunda está recogida en (3, 4) y basada en la Ley Rectangular. La tercera y la cuarta definición están basadas en la variable aleatoria real de Weibull y en la variable aleatoria real de Laplace-Gauss, respectivamente. A partir de las tres últimas definiciones de la variable aleatoria logística generalizadas deduciremos sus densidades.

INTRODUCCIÓN

La presentación de cuatro definiciones para la variable aleatoria real logística generalizada no ha sido puro capricho, sino debido a que dicha variable constituye —en sí misma— una herramienta de gran interés, dadas sus aplicaciones no sólo en la ingeniería de la demanda (penetración en el mercado de un nuevo producto), sino también en las ciencias de la naturaleza (crecimiento de población, aumento de peso en animales). Mientras que las tres primeras definiciones son DIRECTAS, la cuarta es GENERAL ya que, de ella, se deducen tanto variable aleatoria real logística generalizada como la variable aleatoria real Z de Fisher. Hemos de indicar que, en cuanto concierne a la definición convencional —ya establecida desde hace tiempo— tan sólo hemos encontrado la deducción de la densidad de la variable aleatoria real logística en (1, 2, 5) y de la variable aleatoria real logística generalizada en (1, 2).

Las tres nuevas definiciones que proponemos de la variable aleatoria real logística generalizada están basadas en la variable aleatoria real Rectangular (3, 4), variable aleatoria real de Weibull (6, 7, 8, 9) y, en la variable aleatoria real de Laplace-Gauss (6).

En última instancia, indicamos que para la realización de este artículo hemos utilizado la **función indicadora** para expresar la densidad de las variables aleatorias reales, salvo en el caso en el que el dominio de variación es R.

A título informativo apuntamos la creciente utilización de dicha notación (1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12).

Una definición —relativamente reciente— didáctica de la **función indicadora** se encuentra en (12).

DEFINICIONES DE LA VARIABLE ALEATORIA LOGÍSTICA GENERALIZADA

Primera definición

La primera definición está contemplada y deducida su densidad en (1, 2). Por consiguiente, nos limitamos a exponer su definición y su densidad.

Sean X e Y dos variables aleatorias reales independientes que siguen la Ley de Gumbel (13, 14)

$$X \hookrightarrow Gum\,(0,1) \quad Y \hookrightarrow Gum\,(0,1)$$

de densidades

$$f_X(x) = e^{(x - e^{x})} \quad x \in R$$

$$f_Y(y) = e^{(y - e^{y})} \quad y \in R$$

La variable aleatoria real logística generalizada la definimos de la siguiente manera

$$L_g = \alpha + \beta\,(X - Y) \qquad (\alpha \in R,\ \beta > 0)$$

La densidad de la variable aleatoria real logística generalizada es:

$$f_{L_g}(l_g;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta}\,\frac{e^{-\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}}{\left[1+e^{-\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}\right]^2} \quad l_g \in R$$

Observación de interés

Las densidades de las variables aleatorias reales **Logística, Cauchy (0,1) y Laplace-Gauss (0,1)** son simétricas respecto al origen y se verifica

$$\left[1 - F_L(l)\right] > \left[1 - F_{C(0,1)}(x)\right] > \left[1 - F_{LG(0,1)}(y)\right]\ ,\ l=x=y$$

Cuando $l=x=y=1$:

$$1 - F_L(1) = 0{,}26894 \qquad 1 - F_{C(0,1)}(1) = 0{,}25000 \qquad 1 - F_{LG(0,1)}(1) = 0{,}15866$$

Segunda definición

Mientras que la primera definición se encuentra en (1, 2), la idea de la segunda definición surge de la lectura de los libros de Degrave (3) y Lapresté (4). Por consiguiente, dado que no se contempla íntegramente su definición y su densidad en ningúno de los libros consultados procederemos a ello.

Sea X una variable aleatoria real que sigue la Ley Rectangular

$$X \hookrightarrow U\left[-1,1\right]$$

de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

La variable aleatoria real logística generalizada la definimos de la siguiente manera:

$$L_g = \alpha + \beta \log_e\left(\frac{1+X}{1-X}\right) \quad (\alpha \in R, \beta > 0)$$

Demostración de la densidad

$$F_{L_g}(l_g) = P\,(L_g \leq l_g) = P\left(\alpha + \beta \log_e\left(\frac{1+X}{1-X}\right) \leq l_g\right) =$$

$$= P\left(\frac{1+X}{1-X} \leq e^{\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}\right) = P\left(X \leq \frac{e^{\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}-1}{e^{\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}+1}\right)$$

Por lo tanto,

$$F_{L_g}(l_g) = F_X\left(\frac{e^{\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}-1}{e^{\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}+1}\right)$$

Aplicando la regla de la cadena (15) y operando, convenientemente, llegamos al siguiente resultado

$$f_{L_g}(l_g;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta}\,\frac{e^{\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}}{\left[1+e^{\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}\right]^2} \quad l_g \in R$$

Tercera definición

Así como la primera definición se encuentra íntegramente en (1, 2), la segunda surge de la lectura de los libros (3, 4), la tercera no se contempla, al menos, en la bibliografía utilizada para la realización de este artículo.

Sean X e Y dos variables aleatorias reales independientes que siguen la

Ley de Weibull (0, θ,1) (6, 7, 8, 9)

de densidades:

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{x}{\theta}}\ \mathbb{I}_{R^+}(x) \qquad ,\ \theta\ (\textit{parámetro de escala}) > 0$$

$$f_Y(y;\theta) = \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{y}{\theta}}\ \mathbb{I}_{R^+}(y) \qquad ,\ \theta\ (\textit{parámetro de escala}) > 0$$

La variable aleatoria real logística generalizada la definimos de la siguiente manera,

$$L_g = \alpha + \beta \log_e\left(\frac{X}{Y}\right) \quad (\alpha \in R, \beta > 0)$$

Demostraremos que su densidad es:

$$f_{L_g}(l_g;\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta}\frac{e^{-\left(\frac{l_g-\alpha}{\beta}\right)}}{\left[1+e^{-\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}\right]^2}\quad l_g\in R$$

Demostración

La demostración la realizaremos en dos pasos.

Primer paso

Deducción de la siguiente expresión,

$$f_{L_g}(l_g;\alpha,\beta)\ =\ \frac{1}{\beta}\,e^{\left(\frac{l_g-\alpha}{\beta}\right)}\,\frac{dF_{V_1}\left(e^{\frac{l_g-\alpha}{\beta}}\right)}{dv_1}$$

donde,

$$V_1=\frac{X}{Y}$$

como mostramos a continuación:

$$F_{L_g}(l_g;\alpha,\beta)=P(L_g\le l_g)=P\left[\alpha+\beta\log_e\left(\frac{X}{Y}\right)\le l_g\right]=$$

$$=P\left[\log_e\left(\frac{X}{Y}\right)\le\left(\frac{l_g-\alpha}{\beta}\right)\right]=P\left(\frac{X}{Y}\le e^{\left(\frac{l_g-\alpha}{\beta}\right)}\right)=P\left(V_1\le e^{\left(\frac{l_g-\alpha}{\beta}\right)}\right)=$$

$$=F_{V_1}\left[e^{\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}\right]$$

Por consiguiente,

$$F_{L_g}(l_g;\alpha,\beta) = F_{V_1}\left[e^{\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)} \right]$$

Aplicando la regla de la cadena (15) y operando, convenientemente, llegamos al siguiente resultado,

$$f_{L_g}(l_g;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta}\, e^{\left(\frac{l_g-\alpha}{\beta}\right)} \frac{dF_{V_1}\left[e^{\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)} \right]}{dv_1}$$

2. Dedución de la densidad de

$$V_1$$

Para proceder a la deducción de la densidad de

$$V_1$$

haremos uso del:

- Teorema fundamental de transformación de vectores aleatorios.

- Método de la variable auxiliar.

Dado que, el tratamiento tanto de la transformación de vectores aleatorios como del método de la variable auxiliar, se realiza, por un lado: con todo rigor (5) y por otro, de forma didáctica pero sin pérdida de contenido matemático (16, 17) nos limitaremos a utilizarlos —convenientemente— para nuestro desarrollo, tal como mostraremos a continuación.

Partimos de dos variables aleatorias reales, siendo una de ellas una variable auxiliar. A efectos de cálculo se puede considerar como variable auxiliar.

$$V_2 = Y \quad o\ bien\ V_2 = X$$

Nosotros ulilizamos la primera opción

$$V_1 = \frac{X}{Y}$$

$$V_2 = Y\ (variable\ auxiliar)$$

Dado que el dominio de variación de X e Y es:

$$x \in R^+ \qquad y \in R^+$$

el de V_1 y V_2 es:

$$v_1 \in R^+ \quad v_2 \in R^+$$

En nuestro caso concreto, la transformación inversa de

$$v_1 = \varphi_1 (x, y) = \frac{x}{y}$$

$$v_2 = \varphi_2 (y) = y$$

es

$$x = \phi_1 (v_1, v_2) = v_1 \; v_2$$

$$y = \phi_2 (v_2) = v_2$$

Dicha transformación inversa es biyectiva para todo

$$(x, y) \in R^+ \; x \; R^+$$

y admite como Jacobiano

$$J\left(\frac{x, y}{v_1, v_2}\right) = Det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v_1} & \dfrac{\partial x}{\partial v_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v_1} & \dfrac{\partial y}{\partial v_2} \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} v_2 & v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v_2$$

Haciendo uso del teorema fundamental asociado a la transformación de vectores aleatorios, ya podemos transformar

$$f_{X,Y} (x, y; \theta) \; en \; g_{V_1, \; V_2} (v_1, v_2; \theta)$$

En nuestro caso concreto, la expresión matemática que nos permite dicha transformación es

$$f_{V_1, V_2} (v_1, v_2; \theta) = f_{X,Y} (x = \phi_1 \; (v_1, v_2), y = \phi_2 \; (v_2)) \;\; | \;\; J\left(\frac{x, y}{v_1, v_2}\right) \; |$$

Por consiguiente, la pareja de variables aleatorias reales

$$(V_1, V_2)$$

tienen de densidad conjunta

$$f_{V_1,V_2}(v_1,v_2;\theta)=\frac{1}{\theta^2}\,v_2\;e^{-v_2\left(\frac{1+v_1}{\theta}\right)}\;\mathbb{I}_{R^+\,x\,R^+}(v_1,v_2)$$

Así pues, la densidad marginal de

$$V_1$$

calculada de la siguiente manera

$$f_{V_1}(v_1)=\int_0^{+\infty} f_{V_1,V_2}(v_1,v_2;\theta)\,dv_2$$

es

$$f_{V_1}(v_1)=\frac{1}{(1+v_1)^2}\;\mathbb{I}_{R^+}(v_1)$$

De lo que se deduce —fácilmente— la densidad de

$$L_g$$

$$f_{L_g}(l_g;\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta}\,\frac{e^{\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}}{\left[1+e^{\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}\right]^2}\quad l_g\in R$$

Esta forma de expresar la densidad de la variable aleatoria real logística generalizada se encuentra en (6, 14, 18).

Otra forma de expresar la densidad de la variable aleatoria real logística generalizada es

$$f_{L_g}(l_g;\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta}\,\frac{e^{-\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}}{\left[1+e^{-\left(\frac{lg-\alpha}{\beta}\right)}\right]^2}\quad l_g\in R$$

Esta forma se encuentra en (1, 2, 13).

Y, finalmente, otra forma de expresar la densidad de la variable aleatoria real logística generalizada es

$$f_{L_g}(l_g;\alpha,\beta) = \frac{1}{4\beta}\ sech^2\left(\frac{l_g-\alpha}{2\beta}\right) \qquad l_g \in R$$

Esta forma se encuentra en (13, 14).

Cuarta definición

Esta definición tampoco está contenida en la bibliografía contenida en nuestro artículo.

Sean X_j $(j = 1,...,n_1)$ variables aleatorias reales independientes que siguen la Ley de Laplace-Gauss de media 0 *y desviación típica* σ

Sean Y_k $(k = 1,...,n_2)$ variables aleatorias reales independientes que siguen la Ley de Laplace-Gauss de media 0 *y desviación típica* σ

Las variables X_j $(j = 1,...,n_1)$ e Y_k $(k = 1,...,n_2)$ son independientes

Definimos una nueva variable aleatoria $\Re$ J de la siguiente manera:

$$J = \alpha + \beta\ \log_e\left(\frac{1}{\theta}\,\frac{n_2}{n_1}\,\frac{\sum_{j=1}^{j=n_1} X_j^2}{\sum_{k=1}^{k=n_2} Y_k^2}\right) \quad (\alpha \in R, \beta > 0, \theta \in R_+^*)$$

de densidad

$$f_J(j;\theta,\alpha,\beta) = \frac{\theta^{\frac{n_1}{2}}\, n_1^{\frac{n_1}{2}}\, n_2^{\frac{n_2}{2}}}{\beta\,\mathrm{B}\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\ \frac{\left[e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)}\right]^{\frac{n_1}{2}}}{\left[n_2 + n_1\,\theta\, e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)}\right]^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \qquad j \in R$$

Observación

Cuando $n_1 = 2,\ n_2 = 2\ y\ \theta = 1$

la variable aleatoria $\Re$ *J se convierte*

en la variable aleatoria $\Re\ L_g$:

$$L_g = \alpha + \beta \log_e \left(\frac{\sum_{j=1}^{j=2} X_j^2}{\sum_{k=1}^{k=2} Y_k^2} \right)$$

$$\textit{Cuando}\ \alpha = 0,\ \beta = \frac{1}{2}\ y\ \theta = 1$$

la variable aleatoria $\Re$ *J se convierte*

en la variable aleatoria $\Re$ *Z de Fisher* :

$$Z = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{n_2}{n_1} \frac{\sum_{j=1}^{j=n_1} X_j^2}{\sum_{k=1}^{k=n_2} Y_K^2} \right)$$

Demostración

Sean S, W y R_1 *tres variables aleatorias reales definidas de la siguiente manera*

$$S = \sum_{j=1}^{j=n_1} X_j^2 \quad W = \sum_{k=1}^{k=n_2} Y_k^2 \quad R_1 = \frac{S}{W}$$

Partiendo de la definición de la función de distribución de J y operando, convenientemente, llegamos —sin dificultad— al siguiente resultado

$$f_J(j;\theta,\alpha,\beta) = \frac{\theta}{\beta} \frac{n_1}{n_2} e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)} \frac{dF_{R_1}\left(\theta \frac{n_1}{n_2} e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)} \right)}{dr_1}$$

tal como mostramos a continuación

$$F_J(j) = P(J \le j) = P\left[\alpha + \beta \log_e\left(\frac{1}{\theta}\frac{n_2}{n_1}\frac{S}{W}\right) \le j\right] =$$

$$= P\left(\frac{S}{W} \le \theta \frac{n_1}{n_2} e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)}\right) = P\left(R_1 \le \theta \frac{n_1}{n_2} e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)}\right) = F_{R_1}\left(\theta \frac{n_1}{n_2} e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)}\right)$$

Por lo tanto,

$$F_J(j) = F_{R_1}\left(\theta \frac{n_1}{n_2} e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)}\right)$$

Aplicando la regla de la cadena (15) y operando, convenientemente, llegamos al siguiente resultado,

$$f_J(j;\theta,\alpha,\beta) = \frac{\theta}{\beta}\frac{n_1}{n_2} e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)} \frac{dF_{R_1}\left(\theta \frac{n_1}{n_2} e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)}\right)}{dr_1}$$

Por consiguiente, para deducir la densidad de J es necesario conocer la densidad de

$$R_1 = \frac{S}{W}$$

Dado que para deducir la densidad de

$$R_1$$

es necesario conocer las densidades de S y W, nos disponemos a deducir una de ellas, ya que la otra es la misma.

Dedución de la densidad de S

Para la dedución de la densidad de S procedemos a la siguiente manera.

1. Dedución de la densidad de

$$S_1 = X_1^2$$

Partiendo de la función de distribución de

$$S_1$$

y operando, convenientemente, llegamos —sin dificultad— al siguiente resultado

$$f_{S_1}(s_1;\sigma) = \frac{1}{\sqrt{s_1}} \frac{dF_{X_1}\left(\sqrt{s_1}\right)}{dx_1}$$

tal como mostramos a continuación

$$F_{S_1}(s_1) = P\left(S_1 \leq s_1\right) = P\left(X_1^2 \leq s_1\right) =$$
$$= P\left(-\sqrt{s_1} \leq X_1 \leq \sqrt{s_1}\right) = 2\,F_{X_1}\left(\sqrt{s_1}\right) - 1$$

Por lo tanto,

$$F_{S_1}(s_1) = 2\,F_{X_1}\left(\sqrt{s_1}\right) - 1$$

Aplicando la regla de la cadena (15) y operando, convenientemente, llegamos al siguiente resultado

$$f_{S_1}(s_1;\sigma) = \frac{1}{\sqrt{s_1}} \frac{dF_{X_1}\left(\sqrt{s_1}\right)}{dx_1}$$

Por consiguiente,

$$f_{S_1}(s_1;\sigma) = \frac{1}{\sqrt{s_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{s_1}{2\sigma^2}} \quad \mathbb{I}_{R^+}\left(s_1\right) \quad , \sigma \in R_+^*$$

2. Cálculo de la función característica de

$$S_1$$

Partiendo de la defifición de función característica de

$$S_1$$

y operando, convenientemente, llegamos —sin dificultad— al siguiente resultado

$$\varphi_{S_1}(t) = \frac{1}{\left[1 - \left(2\sigma^2 t\right)i\right]^{\frac{1}{2}}}$$

tal como mostramos a continuación

$$\varphi_{S_1}(t) = E\left[e^{itS_1}\right] = \int_0^{+\infty} e^{its_1}\, f_{S_1}(s_1;\sigma)\, ds_1 =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{its_1} \frac{1}{\sqrt{s_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{s_1}{2\sigma^2}}\, ds_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_0^{+\infty} s_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[1-\left(2\sigma^2 t\right)i\right]s_1}\, ds_1$$

Ya que, la función subintegral es una **función holomorfa,** podemos resolver la integral como si fuera una función real, aplicando el siguiente resultado

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-hx}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{h^p}, p > 0$$

Así pues,

$$\int_0^{+\infty} s_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[1-\left(2\sigma^2 t\right)i\right]s_1}\, ds_1 = \frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma}{\left[1-\left(2\sigma^2 t\right)i\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Por consiguiente,

$$\varphi_{S_1}(t) = \frac{1}{\left[1-\left(2\sigma^2 t\right)i\right]^{\frac{1}{2}}}$$

3. Cálculo de la función característica de

$$S$$

Partiendo de la definición de función característica de

$$S$$

y operando, convenientemente, llegamos —sin dificultad— al siguiente resultado

$$\varphi_S(t) = \frac{1}{\left[1-\left(2\sigma^2 t\right)i\right]^{\frac{n_1}{2}}}$$

tal como mostramos a continuación

$$\varphi_S(t) = E\left[e^{itS}\right] = E\left(e^{it\sum_{j=1}^{j=n_1} X_j^2}\right) = \prod_{j=1}^{j=n_1} E\left(e^{itX_j^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{\left[1-\left(2\sigma^2 t\right)i\right]^{\frac{n_1}{2}}}$$

Por lo tanto,

$$\varphi_S(t) = \frac{1}{\left[1-\left(2\sigma^2 t\right)i\right]^{\frac{n_1}{2}}}$$

4. Cálculo de la densidad de S a partir de su función característica

Partiendo de la definición de función característica de

$$S$$

y teniendo en cuenta el siguiente resultado

$$\varphi_S(t) = \frac{1}{\left[1-\left(2\sigma^2 t\right)i\right]^{\frac{n_1}{2}}}$$

se obtiene

$$\int_0^{+\infty} e^{its} f_S(s;\sigma)\, ds = \frac{1}{\left[1-(2\sigma^2 t)i\right]^{\frac{n_1}{2}}}$$

La densidad de S se puede calcular de dos formas:

1. Haciendo uso de la variable compleja (Teorema de inversión).
2. Haciendo uso del siguiente resultado

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-hx}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{h^p},\ p > 0$$

Obviamente nosotros utilizamos la segunda opción por considerarla más simple que la primera.

La estrategia a seguir el la siguiente:

Si hacemos

$$h = 1 - (2\sigma^2 t)i \quad y \quad p = \frac{n_1}{2}$$

la fórmula

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} x^{\,p-1}\, e^{-hx}\, dx = \frac{1}{h^p}$$

se convierte en

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} x^{\frac{n_1}{2}-1}\, e^{-\left[1-\left(2\,o^2\,t\right)i\right]x}\, dx = \frac{1}{\left[1-\left(2\,o^2\,t\right)i\right]^{\frac{n_1}{2}}}$$

Haciendo el cambio de variable

$$2\sigma^2 x = s$$

y operando, convenientemente, llegamos —sin dificultad— al siguiente resultado

$$\int_0^{+\infty} e^{its}\, \frac{s^{\,n_1-1}\, e^{-\frac{s}{2\sigma^2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) 2^{\frac{n_1}{2}}\, \sigma^{n_1}}\, ds = \frac{1}{\left[1-\left(2\sigma^2 t\right)i\right]^{\frac{n_1}{2}}}$$

De lo que se desprende,

$$f_S(s;\sigma) = \frac{s^{\frac{n_1}{2}-1}\, e^{-\frac{s}{2\sigma^2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) 2^{\frac{n_1}{2}}\, \sigma^{n_1}} \quad \mathbb{1}_{R^+}(s) \quad , \sigma \in R_+^*$$

Actuando de la misma manera que hemos hecho con S, se deduce la densidad de W.

$$f_W(w;\sigma) = \frac{w^{\frac{n_2}{2}-1} e^{-\frac{w}{2\sigma^2}}}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right) 2^{\frac{n_2}{2}} \sigma^{n_2}} \mathbb{I}_{R^+}(w) \quad , \sigma \in R_+^*$$

Observación

$$Si\ \sigma = 1$$

$$S \hookrightarrow \chi^2_{n_1} \ \textit{de Helmert}\ (1875)\ (19)$$

$$W \hookrightarrow \chi^2_{n_2} \ \textit{de Helmert}\ (1875)\ (19)$$

5. Dedución de la densidad de

$$R_1 = \frac{S}{W}$$

Para proceder a la deducción de la densidad de

$$R_1 = \frac{S}{W}$$

haremos uso del:

- Teorema fundamental de transformación de vectores aleatorios.
- Método de la variable auxiliar.

Nos limitamos a utilizarlos, convenientemente, para nuestro desarrollo, tal como mostramos a continuación.

Partimos de dos variables aleatorias reales, siendo una de ellas una variable auxiliar,

$$R_1 = \frac{S}{W}$$

$$R_2 = W$$

Dado que el dominio de variación de S y W es:

$$s \in R^{+} \quad y \quad w \in R^{+}$$

$$el\ de\ R_1\ y\ R_2\ es:$$

$$r_1 \in R^{+} \quad y \quad r_2 \in R^{+}$$

En nuestro caso concreto, la transformación inversa de

$$r_1 = \varphi_1(s,w) = \frac{s}{w}$$

$$r_2 = \varphi_2(w) = w$$

es

$$s = \phi_1(r_1, r_1) = r_1 r_2$$

$$W = \phi_2(r_2) = r_2$$

Dicha transformación inversa es biyectiva para todo

$$(S, W) \in R^{+}\ x\ R^{+}$$

y admite como Jacobiano

$$J\left(\frac{s,w}{r_1,r_2}\right) = Det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial r_1} & \dfrac{\partial s}{\partial r_2} \\ \dfrac{\partial w}{\partial r_1} & \dfrac{\partial w}{\partial r_2} \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} r_2 & r_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = r_2$$

Dado que se verifican las condiciones del teorema asociado a la transformación de vectores aleatorios podemos transformar

$$f_{S,W}(s,w;\sigma)\ en\ f_{R_1,\ R_2}(r_1,r_2;\sigma)$$

En nuestro caso concreto, dicha transformación se calcula haciendo uso de la siguiente expresión:

$$f_{R_1,R_2}(r_1,r_2;\sigma) = f_{S,W}\left[s = \phi_1(r_1,r_2), w = \phi_2(r_2)\right] \mid J\left(\frac{s,w}{r_1,r_2}\right) \mid$$

Por consiguiente, la densidad conjunta de

$$(R_1,\ R_2)$$

es

$$f_{R_1,R_2}\ (r_1,r_2;\sigma)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\ \sigma^{\ n^1+n^2}}\ r_1^{\frac{n_1}{2}-1}\ e^{-\frac{r_2}{2\sigma^2}(1+r_1)}\ \mathbb{1}_{R^+\ xR^+}(r_1,r_2)$$

A partir de la densidad conjunta de

$$(R_1,\ R_2)$$

podemos calcular, sin dificultad, la densidad marginal de

$$R_1$$

de la siguiente manera

$$f_{R_1}(r_1)=\int_0^{+\infty}\ f_{R_1,R_2}\ (r_1,r_2;\sigma)\ dr_2$$

Sustituyendo la densidad conjunta de

$$(R_1,\ R_2)$$

en la fórmula que nos permite calcular la densidad marginal de

$$R_1$$

llegamos, sin dificultad, al siguiente resultado

$$f_{R_1}(r_1)=\frac{1}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\frac{r_1^{\frac{n_1}{2}-1}}{\left(1+r_1\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\ \mathbb{1}_{R^+}(r_1)$$

Observación

Mientras que en la densidad conjunta de

$$(R_1,\ R_2)$$

interviene el

$$\sigma$$

en la densidad marginal de

$$R_1$$

no.

Finalmente, teniendo en cuenta el siguiente resultado

$$f_J\,(j;\theta,\alpha,\beta)=\frac{\theta}{\beta}\frac{n_1}{n_2}\,e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)}\,\frac{dF_{R_1}\left(\theta\,\frac{n_1}{n_2}\,e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)}\right)}{dr_1}$$

llegamos —sin dificultad— a la densidad de J

$$f_J\,(j;\theta,\alpha,\beta)=\frac{\theta^{\frac{n_1}{2}}\,n_1^{\frac{n_1}{2}}\,n_2^{\frac{n_2}{2}}}{\beta\,\mathrm{B}\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\,\frac{\left[e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)}\right]^{\frac{n_1}{2}}}{\left[n_2+n_1\,\theta\,e^{\left(\frac{j-\alpha}{\beta}\right)}\right]^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\qquad j\in R$$

CONCLUSIÓN

Entre las cuatro definiciones que proponemos de la variable aleatoria real logística generalizada, la cuarta es la más interesante puesto que, de la variable aleatoria real J se deduce: no sólo la definición de la variable aleatoria real logística generalizada, sino también la de la variable aleatoria real Z de Fisher. Por consiguiente, como resultado del desarrollo de este artículo se desprenden cuatro definiciones equivalentes para la variable aleatoria real logística generalizada.

Primera definición

Sean X e Y dos variables aleatorias reales independientes que siguen la Ley de Gumbel

$$X \rightarrow Gum\ (0,1) \qquad Y \rightarrow Gum\ (0,1)$$

de densidades

$$f_X\,(x) = e^{\,(x-e^x)} \qquad x \in R$$

$$f_Y\,(y) = e^{\,(y-e^y)} \qquad y \in R$$

La variable aleatoria real logística generalizada la definimos de la siguiente manera

$$L_g = \alpha + \beta\,(X - Y),\ (\alpha \in R,\ \beta > 0)$$

Segunda definición

Sea X una variable aleatoria real que sigue la Ley Rectangular

$$X \hookrightarrow U\ \left\lfloor -1,1 \right\rfloor$$

de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

La variable aleatoria real logística generalizada la definimos de la siguiente forma

$$L_g = \alpha + \beta \log_e \left(\frac{1+X}{1-X} \right) \quad (\alpha \in R, \beta > 0)$$

Tercera definición

Sean X e Y dos variables aleatorias reales independientes que siguen la Ley de Weibull

$$X \hookrightarrow W\ (0,\theta,1) \qquad Y \hookrightarrow W\ (0,\theta,1)$$

de densidades

$$f_X\ (x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad \mathbb{1}_{R^+}\ (x) \quad , \theta \in R_+^*$$

$$f_Y\ (y;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}} \quad \mathbb{1}_{R^+}\ (y) \quad , \theta \in R_+^*$$

La variable aleatoria real logística generalizada la definimos de la siguiente manera

$$L_g = \alpha + \beta \log_e \left(\frac{X}{Y} \right), (\alpha \in R, \beta > 0)$$

Cuarta definición

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias reales

independientes que siguen la Ley de Laplace-Gauss

$X_1 \hookrightarrow LG\ (0,\sigma) \qquad X_2 \hookrightarrow LG\ (0,\sigma)$

de densidades

$$f_{X_1}(x_1;\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sigma}\right)^2} \quad x_1 \in R, \sigma \in R_+^*$$

$$f_{X_2}(x_2;\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{\sigma}\right)^2} \quad x_2 \in R, \sigma \in R_+^*$$

Sean Y_1 e Y_2 dos variables aleatorias reales

independientes que siguen la Ley de Laplace-Gauss

$Y_1 \hookrightarrow LG\ (0,\sigma) \qquad Y_2 \hookrightarrow LG\ (0,\sigma)$

de densidades

$$f_{Y_1}(y_1;\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{\sigma}\right)^2} \quad y_1 \in R, \sigma \in R_+^*$$

$$f_{Y_2}(y_2;\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_2}{\sigma}\right)^2} \quad y_2 \in R, \sigma \in R_+^*$$

(X_1, X_2) son independientes de (Y_1, Y_2)

La variable aleatoria real logística generalizada la definimos de la siguiente manera

$$L_g = \alpha + \beta \log_e \left(\frac{\sum_{j=1}^{j=2} X_j^2}{\sum_{k=1}^{k=2} Y_k^2} \right), (\alpha \in R, \beta > 0)$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Montfort, A. (1980). *Cours de probabilités.* Annexe de Philippe Tassi. Ed. Económica. 20 Édition.

2. Tassi, Ph. (1985). *Méthodes Statistiques.* Ed. Económica.

3. Degrave, C., Degrave, D. (1992). *Probabilités-Statistiques.* Tome 3. Ed. Bréal.

4. Lapresté, J-Th. (1991). *Probabilités.* 92 exercices corrigés. Dunod Université.

5. Legait, S., Tassi, Ph. (1990). *Théorie des probabilités en vue des applications statistiques.* Éditions Technip.

6. Díaz-Llanos Sáinz-Calleja, Fco. J. (1993). *Formulaciones de interés en la Estadística Aplicada.* Registro Provincial de la Propiedad Intelectual de Madrid. Número 13975.

7. Díaz-Llanos Sáinz-Calleja, Fco. J. (1996). *Un estudio de la Ley de Weibull.* Artes Liberales. Serie Quadrivium, n. 14. Ed UEM-CEES.

8. Pollard, A., Rivoire, Cl. (1971). *Fiabilité et Statistiques Prévisionnelles.* Méthode de Weibull. Ed. Eyrolles.

9. Weibull, W. (1951). «A Statistical Distribution Function of wide applicability». *Journal of applied mechanics,* 18.

10. Bouleau, N. (1986). *Probabilités de l'ingénieur. Variables aléatoires et simulation.* Ed. Hermann.

11. Caron, N., Tassi, Ph. (1991). *Problèmes resolus de Statistique Mathématique. Economica.*

12. Ghorbanzadeh, D. (1998). *Probabilités.* Exercices corrigés. Éditions Technip.

13. Evans, M.; Hastings, N., Peacock, B. (2000). *Statistical Distributions.* Third Edition. John Wiley & Sons, Inc.

14. Hasting, N. A., Peacock, J. B. (1975). *Statistical Distributions.* Butterworh & Co (Publishers) Ltd.

15. Bartle, R. G., Sherbert, D. R. (2000). *Introducción al Análisis Matemático de una variable.* 20 Edición. Limusa Wiley.

16. Alberola López, C. (2004). *Probabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos. Una introducción orientada a las Telecomunicaciones.* Universidad de Valladolid. Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial. Serie: Ingeniería, n. 112.

17. Lepage, Y.; Moore, M., Roy, R. (1975). *Introducción à la théorie des probabilités.* Les Presses de l'Université du Québec.

18. Manoukian, E. B. (1986). *Guide de Statistique Appliquée.* Ed. Hermann.

19. Cramer, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics.* Princeton University Press, Princeton, N J.